

12. Lagrange-Formalismus III

Übung 12.1: Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Diese Frage bezieht sich auf die Gleichungen im Skript hier gefunden:

http://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/sose_13/T1/mechaniskript.pdf

- a) Begründen Sie ohne Rechnung, warum die Lagrange-Funktion (5.209)

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

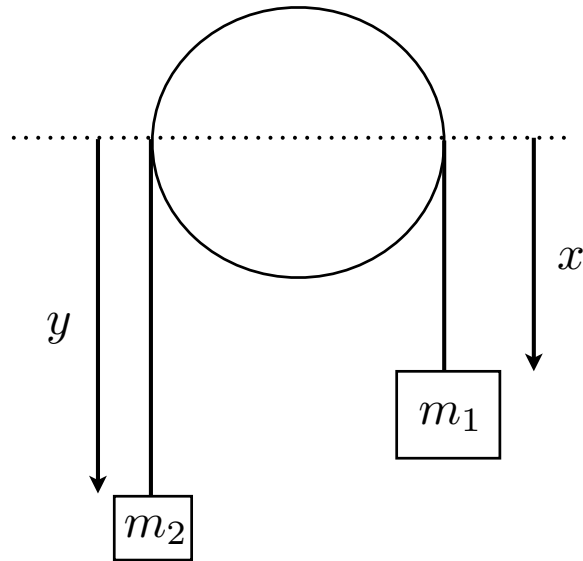
invariant sein muss, wenn alle Punktmassen mit derselben beliebigen Drehmatrix \mathbf{D} um den Ursprung gedreht werden. Folgt dann daraus die Existenz einer Erhaltungsgrösse?

- b) Schreiben Sie die Drehung aus Aufgabenteil 1 in Form einer infinitesimalen Transformation (5.195) auf. Verwenden Sie dazu infinitesimale Drehungen, wie sie in Abschnitt 2.3 eingeführt wurden. Benutzen Sie die Indexschreibweise, anstatt mit Vektoren zu arbeiten. Welches Ergebnis liefert (5.200) im Skript oben verlinkten? Wie lautet die damit verbundene Erhaltungsgrösse?

Übung 12.2: Atwood Maschine

Betrachten Sie die Atwood-Maschine in der Abbildung unten gezeigt, in denen die beiden Massen m_1 und m_2 durch eine dehnbare Schnur (Länge l), die über einen masselosen Riemen-scheibe mit reibungsfreien Lagern und Radius R leitet suspendiert sind.

- a) Notieren Sie sich die Lagrange \mathcal{L} , mit der Entfernung x als generalisierte Koordinate.
b) Finden Sie die Lagrange Bewegungsgleichung, und lösen es für die Beschleunigung \ddot{x} .



Übung 12.3: Fermat-Prinzip

Fermat-Prinzip besagt, dass Licht reist von einem Punkt zum anderen entlang der Bahn, die die Fahrzeit ein Minimum macht.

- a) Verwenden Fermat-Prinzip zur Ableitung des Gesetzes für die Reflexion von Licht von einem Spiegel, nämlich

$$\text{“Einfallswinkel”} = \text{“Reflexionswinkel”}$$

- b) Verwenden Fermat-Prinzip abzuleiten Snell-Gesetz für die Brechung des Lichts, das von einem Medium, in dem die Geschwindigkeit des Lichts ist c/n_0 zu einem Medium, in dem die Geschwindigkeit des Lichts ist c/n_1 (c ist die Geschwindigkeit von Licht im freien Raum und n ist der Brechungsindex), nämlich

$$n_0 \sin \phi_0 = n_1 \sin \phi_1 .$$

Hier ϕ_0 und ϕ_1 die Winkel zu der Normalen einfallenden und gebrochenen Strahlen.