Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

7. Rotierende Koordinatensysteme

Übung 7.1: Einige wichtige Relationen

Sehen Sie sich bitte den Abschnitt 2.3 im Skript als Vorbereitung für diese Aufgabe an. (http://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/sose_13/T1/mechanikskript.pdf)

Zwei Koordinatensysteme hängen durch die zeitabhängige Drehung

$$\mathbf{x}' \;=\; R\,\mathbf{x}$$

zusammen. Dabei ist R eine Funktion der Zeit t, die die Eigenschaft $R^T R = RR^T = I$ besitzt.

a) Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}}' = R[\dot{\mathbf{x}} + B\,\mathbf{x}] \qquad \text{mit} \qquad B = R^T \dot{R}$$

gilt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass sich für $\omega_l = \frac{1}{2}\epsilon_{ijl} b_{ij}$ (b_{ij} sind die Komponenten von der Matrix B) die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}}' = R[\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}]$$

ergibt.

c) Zeigen Sie für den Fall $\dot{B} = 0$, dass die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{x}}' = R\,BB\,\mathbf{x} + 2RB\,\dot{\mathbf{x}} + R\,\ddot{\mathbf{x}}$$

beträgt.

d) Verwenden Sie das Ergebnis von c) und die Definition in b) um zu zeigen, dass

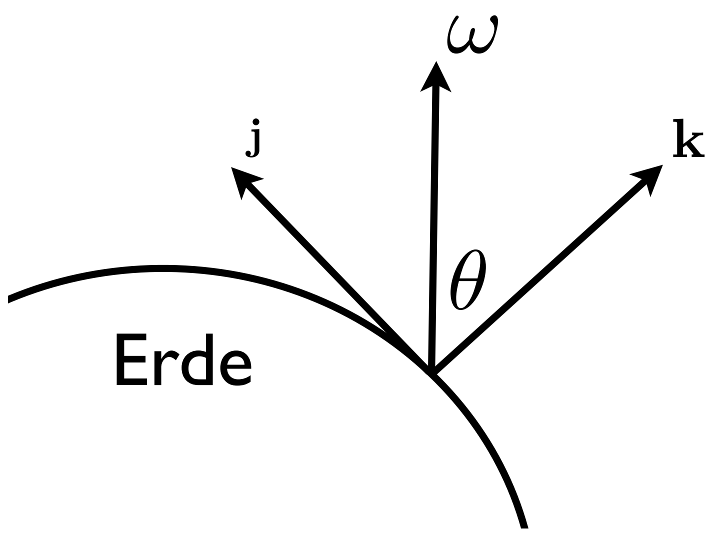
$$\ddot{\mathbf{x}}' = R[\ddot{\mathbf{x}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})]$$

gilt.

Übung 7.2: Ein Teilchen fällt auf die Erde

Wir betrachten ein Bezugssystem, in dem sich die Erde nicht dreht. Ein Teilchen mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ wird aus einer geringen Höhe h über dem Boden fallengelassen. In dieser Aufgabe bestimmen wir, wo das Teilchen landet.

Wählen Sie die Achsen des Koordinatensystems, so dass $\mathbf{i}$ nach Osten zeigt, $\mathbf{j}$ in nördlicher Richtung liegt und $\mathbf{k}$ senkrecht von der Erdoberfläche nach oben zeigt. Der Ursprung des Koordinaten befindet sich auf der Erdoberfläche, direkt unterhalb der Position von der aus das Teilchen fallengelassen wird. Der Winkel zwischen der Erdachse und $\mathbf{k}$ beträgt θ. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt $\boldsymbol{\omega} = \omega \sin\theta\,\mathbf{j} + \omega \cos\theta\,\mathbf{k}$.



a) Die Corioliskraft ist gegeben durch $-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}$, wobei $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ die Position des Teilchens im Koordinatensystem, welches sich mit der Erde dreht ist. Beweisen Sie, dass

$$-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} = 2m\omega\left((\dot{y}\cos\theta - \dot{z}\sin\theta)\mathbf{i} - \dot{x}\cos\theta\,\mathbf{j} + \dot{x}\sin\theta\,\mathbf{k}\right)$$

gilt.

b) Unter Berücksichtigung der Corioliskraft laut die Bewegungsgleichung des Teilchens (wenn ω klein ist)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}\,. \tag{1}$$

Dabei ist $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ die Erdbeschleunigung. Zeigen Sie, dass man, wenn man die Corioliskraft ignoriert, als Lösung dieser Gleichung

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

erhält.

c) Nun gehen wir davon aus, dass die Corioliskraft sehr klein ist und lösen die Bewegungsgleichung in der ersten Ordnung in ω. Da Term auf der rechten Seite von (1) bereits nur Terme in erster Ordnung in ω enthält, können wir sofort das in Aufgabe b) ermittelte Ergbnis für $\mathbf{r}$ in nullter Ordnung verwenden, um die Corioliskraft zu bestimmen.

Bestimmen Sie auf diese Weise den Ort, an dem das Teilchen auf den Boden trifft. Wenn Sie keine Fehler gemacht haben, erhalten Sie für diesen Ort

$$\mathbf{r} = \frac{\omega}{3}\left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\,\mathbf{i}\quad.$$