Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

1. Vektoren und Kinematik

Übung 1.1: Freie Bewegung

Drei Teilchen bewegen sich ohne äußere Kräfte mit den folgenden Geschwindigkeiten:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ms^{-1} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ms^{-1} \quad , \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} ms^{-1}$$

Außerdem gilt: $(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} = 7m^2s^{-2}$ und $(\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} = -2m^3s^{-3}$.

Berechnen Sie a und b.

Lösung von Übung 1.1

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} = 3a + 3b$$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \times 1 - 0 \times 0 \\ 0 \times 1 - 2 \times 1 \\ 2 \times 0 - 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} = 3a - 2b$$

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 3b = 7 \\ 3a - 2b = -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{9}{5} \;\text{ und }\; a = \frac{8}{15}$$

Übung 1.2: Vektorprodukt Identitäten

A, **B** und **C** sind Vektoren. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \,. \end{aligned}$$

Lösung von Übung 1.2

Methode 1

Zunächst definiert man die Komponenten der Vektoren wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Anschließend berechnet man die beiden Kreuzprodukte:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Nun sieht man, dass die beiden Spatprodukte

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

äquivalent sind.

Um die zweite Identität zu beweisen, nutzen man das bereits bekannte Ergebnis für $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese beiden Vektoren voneinander, so stimmt das Ergebnis mit dem bereits bekannten $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ überein.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,. \end{aligned}$$

Methode 2

Definitionen:
Levi-Civita symbol:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \ \text{wenn} \ (i,j,k) \ \text{ist} \ (1,2,3), (3,1,2) \ \text{oder} \ (2,3,1) \\ -1 \ \text{wenn} \ (i,j,k) \ \text{ist} \ (1,3,2), (3,2,1) \ \text{oder} \ (2,1,3) \\ 0 \ \text{wenn} \ i = j \ , j = k \ \text{oder} \ k = i \end{cases}$$

Kronecker delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad i \neq j \\ 1 & \text{wenn} \quad i = j \end{cases}$$

Einstein Summenkonvention:
Die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}$ wird durch $\mathbf{A}_i$ bezeichnet. Wenn derselbe Index zweimal im gleichen Term vorkommt, wird über alle möglichen Werte für ihn summiert.

$$\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j := \sum_{i=1}^{3} \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$$

Einfache Identitäten:
Wir wissen:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \delta_{jk}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk}\mathbf{A}_j\mathbf{B}_k \\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}_i\mathbf{B}_j\delta_{ij} = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \end{aligned}$$

Lösung des Problems:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{A}_i\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)_i = \mathbf{A}_i\epsilon_{ijk}\mathbf{B}_j\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k\left(\epsilon_{kij}\mathbf{A}_i\mathbf{B}_j\right) \\ &= \mathbf{C}_k\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)_k = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_i &= \epsilon_{ijk}\mathbf{A}_j\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)_k = \epsilon_{ijk}\mathbf{A}_j\epsilon_{klm}\mathbf{B}_l\mathbf{C}_m \\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\mathbf{A}_j\mathbf{B}_l\mathbf{C}_m = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\mathbf{A}_j\mathbf{B}_l\mathbf{C}_m \\ &= \mathbf{A}_m\mathbf{C}_m\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_l\mathbf{B}_l\mathbf{C}_i = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B}_i - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}_i \\ &= \left((\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}\right)_i \end{aligned}$$

Übung 1.3: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Position eines Teilchens wird durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}\, b\sin(\omega t) + \mathbf{y}\, b\cos(\omega t)$$

In dieser Gleichung sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ konstante Vektoren. Sie sind orthogonal ($\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$) und normiert ($\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 1$). Die beiden Größen b und ω sind ebenfalls konstant.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und Beschleunigung $\mathbf{a}$.

b) Skizzieren Sie den Weg der Teilchen in der Ebene, die durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten wird. Zeichnen Sie die Vektoren $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{a}$ bei einer beliebigen Stelle auf diesem Pfad ein.

c) Um welche Art von Bewegung handelt es sich? Welche Eigenschaft dieser Bewegung charakterisieren b und ω.

Lösung von Übung 1.3

a) Man berechnet die Geschwindigkeit und die Beschleunigung aus den Ableitungen von $\mathbf{r}$:

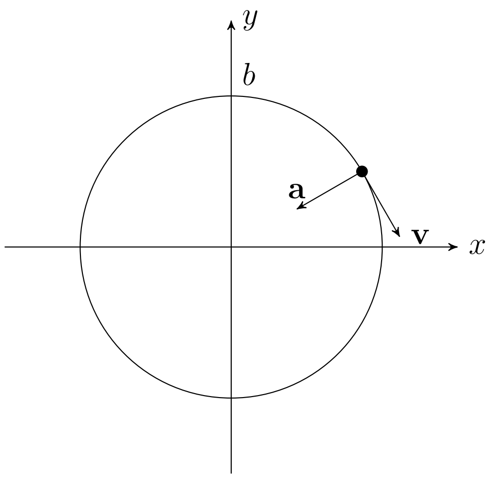
$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{x}\, b\, \omega \cos(\omega t) - \mathbf{y}\, b\, \omega \sin(\omega t) \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{x}\, b\, \omega^2 \sin(\omega t) - \mathbf{y}\, b\, \omega^2 \cos(\omega t)\,.\end{aligned}$$

Nun ermittelt man das Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ and $\mathbf{a}$. Unter den Bedingungen $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 1$ und $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(b^2\omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}(b^2\omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)) \\ &= -(b^2\omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) - b^2\omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)) = 0\,.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ist also senkrecht zur Beschleunigung.

b)



c) Das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit.
Die Größe b bezeichnet den Radius des Kreises:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}\, b^2\, (\sin(\omega t))^2 + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}\, b^2\, (\cos(\omega t))^2 = b^2((\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2) = b^2$$

Das Produkt $b\,\omega$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens (d.h. ω ist die Winkelgeschwindigkeit):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = b^2\omega^2(((\cos(\omega t))^2 + (\sin(\omega t))^2) = b^2\omega^2$$