Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst | Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 | James.Gray@physik.uni-muenchen.de

11. Lagrange-Formalismus II

Übung 11.1: Perle auf Stab II

In Aufgabenblatt 9 haben wir das folgende Problem gelöst:

Eine Perle gleite reibungsfrei und ohne äußere Kräfte auf einem Stab, der sich in der x-y-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung dreht.

Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnungen in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft? Welche Bedeutung hat sie? Ist die Energie erhalten?

a) Verwenden Sie nun die Lagrange-Gleichungen zweiter Art um die Bewegungsgleichungen für diese Problem aufzustellen.

Lösung von Übung 11.1

Die Lagrange-Funktion lautet wegen $V = 0$ in Zylinderkoordinaten

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) \; .$$

Dies entspricht bereits

$$\ddot{\rho} = \omega^2 \rho$$

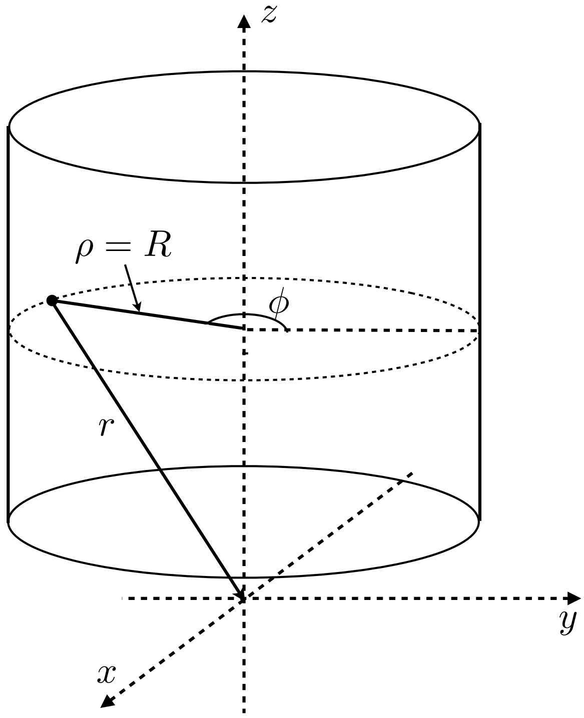
aus dem ersten Aufgabenteil. Die Lösung der Bewegungsgleichung muss selbstverständlich nicht wiederholt werden.
Wie sieht es aber mit der Energieerhaltung im Formalismus der Lagrange-Gleichungen zweiter Art aus? Hier soll an (5.102) (in Skript) erinnert werden. Da die Zwangsbedingung $f = \varphi - \omega t = 0$ nicht skleronom ist,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\omega \neq 0 \; ,$$

entspricht die Hamilton-Funktion nicht der Energie. Dennoch ist die Hamilton-Funktion (5.102) eine Erhaltungsgrösse, da die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit t abhängt. Wir haben im ersten Aufgabenteil schon gesehen, dass die Energie nicht erhalten wird, da die Zwangskraft Arbeit am System leistet.

Übung 11.2: Ein Teilchen bewegt sich auf einem Zylindermantel

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf dem Mantel eines Zylinders mit dem Radius R. In zylindrischen Polarkoordinaten (ρ, ϕ, z) gilt also die Zwangsbedingung $\rho = R$ (siehe Abbildung). Zusätzlich zu der durch diese Zwangsbedingung hervorgerufenen Zwangskraft, welche senkrecht auf dem Zylindermantel steht, wirkt noch die zum Ursprung gerichtete Kraft $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Eine solche Kraft würde z.B. in erster Näherung durch eine Feder, die zwischen dem Teilchen und dem Ursprung gespannt ist, hervorgerufen.



a) Das Teilchen ist der Zwangsbedingung $\rho = R$ ausgesetzt. Seine Position kann also durch die Koordinaten z und ϕ vollständig beschrieben werden. Geben Sie die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion von R, $\dot{z}$ und $\dot{\phi}$ an.

b) Zeigen Sie mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe, dass die kinetische Energie des Teilchens

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

beträgt.

c) Berechnen Sie die potentielle Energie des Teilchens und zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des Systems durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

gegeben ist.

d) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und lösen Sie diese. Beschreiben Sie außerdem die Bewegung des Teilchens.

Lösung von Übung 11.2

a) Da die Koordinate ρ durch die Zwangsbedingung $\rho = R$ festgelegt ist, wird die Position des Teilchens nur durch die Koordinaten z und ϕ beschrieben. Das Problem hat damit zwei Freiheitsgrade und wir verwenden (z, ϕ) als generalisierte Koordinaten. Damit ergeben sich die Komponenten

$$v_\rho = 0 \quad , \quad v_\phi = R\dot{\phi} \quad , \quad v_z = \dot{z} \; .$$

der Geschwindigkeit.

b) Mit ihnen ergibt sich die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)\ .$$

c) Die potentielle Energie für die Federkraft $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ ist $U = \frac{1}{2}kr^2$. Dabei bezeichnet r den Abstand vom Teilchen zum Ursprung des Koordinatensystems und ist gegeben durch $r^2 = R^2 + z^2$ (siehe Skizze). Somit beträgt die kinetische

$$U = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)\ ,$$

und die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)\ .$$

d) Da das System zwei Freiheitsgrade besitzt, gibt es auch zwei Bewegungsgleichungen. Die Gleichung für z lautet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \quad \text{or} \qquad -kz = m\ddot{z}\ .$$

Da $\mathcal{L}$ nicht von ϕ abhängt, ist $\partial\mathcal{L}/\partial\phi = 0$ und somit lautet die Bewegungsgleichung für ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \text{or} \quad 0 = \frac{d}{dt}mR^2\dot{\phi}\ .$$

Die Gleichung für z beschreibt einen Massepunkt der eine harmonische Schwingung

$$z = A\cos(\omega t - \delta)$$

in z-Richtung ausführt. Die Gleichung für ϕ sagt uns, dass die Größe $mR^2\dot{\phi}$ während der Bewegung erhalten ist. Dabei handelt es sich um den Drehimpuls in z-Richtung. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da in dieser Richtung kein Drehmoment wirkt und somit der Drehimpuls konstant bleibt. Da ρ konstant ist, ist auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ konstant. Das Teilchen rotiert also gleichmäßig um den Zylinder und bewegt sich harmonisch auf und ab.

Übung 11.3: Zwei Teilchen und eine Feder

a) Notieren Sie sich die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ für zwei Teilchen mit der selben Masse ($m_1 = m_2 = m$), deren Bewegung auf die x-Achse beschränkt ist und die durch eine Feder mit der potentiellen Energie $U = \frac{1}{2}kx^2$ verbunden sind. Wir gehen davon aus, dass die Feder im kräftefreien Zustand die Länge l hat. In diesem Fall ist x gegeben durch $x = (x_1 - x_2 - l)$, wobei x_1/x_2 die Position des Teilchens auf der rechten/linken Seite der Feder ist. Das Teilchen bei x_1 bleibt immer rechts und das bei x_2 immer links von der Feder.

b) Geben Sie nun die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ in den Koordinaten $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (Schwerpunkt) und x (Dehnung der Feder) an. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für X und x.

c) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für $X(t)$ und $x(t)$ und beschreiben Sie die Bewegung der beiden Teilchen.

Lösung von Übung 11.3

a) Die Lagrange-Funktion für das System lautet

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2 - l)^2 \ .$$

b) Als erstes bestimmen wir die generalisierten Koordinaten x_1 und x_2 als Funktionen von den neuen X und x:

$$x_1 = X + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}l \quad , \quad x_2 = X - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}l \, .$$

Danach setzten wir diese beiden Ausdrücke in die Lagrange-Funktion aus dem Aufgabenteil a) ein, wodurch wir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + \frac{1}{2}\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{X} - \frac{1}{2}\dot{x}\right)^2\right] - \frac{1}{2}kx^2 = m\dot{X}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

erhalten. Die beiden Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} \quad &\Rightarrow \quad 0 = 2m\ddot{X} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \quad &\Rightarrow \quad -kx = \frac{1}{2}m\ddot{x} \, . \end{aligned}$$

c) Die Gleichung für X impliziert, dass $\dot{X}(t) = V_0$ erhalten bleibt. Es gilt somit

$$X(t) = V_0 t + X_0 \ .$$

Der Schwerpunkt X bewegt sich also wie ein freies Teilchen. Diese Verhalt ist zu erwarten, da auf das System keine äußeren Kräfte wirken. Die Gleichung für x besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \ .$$

Dabei handelt es sich um eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{2k/m}$. Somit wissen wir, dass die Feder doppelt so stark ausgedehnt (oder zusammengedrückt) wird wie es eigentlich bei der Schwingung einer Punktmassen m passieren würde. Daher wirkt auf beide Punktmassen eine Kraft die der doppelten Federkonstante $2k$ entspricht.