Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

4. Drehimpulserhaltung und Streuung

Übung 4.1: Noch einmal der Kegel...

Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Innenseite eines Kegelmantels $r = z$. Die Koordinaten r, θ und z sind zylindrische Polarkoordinaten. Die z-Achse zeigt senkrecht nach oben. Das Teilchen startet auf der Höhe $z = a$ mit der Geschwindigkeit v in Richtung θ.

a) Beweisen Sie unter Nutzung der Drehimpuls- und Energieerhaltung, dass

$$\dot{z}^2 + \frac{a^2v^2}{2z^2} + gz = \frac{1}{2}v^2 + ga$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass das Teilchen sich zu allen Zeiten zwischen den beiden Höhen $h_{\min}$ und $h_{\max}$ befindet ($h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$). Finden Sie diese beiden Höhen.

Lösung von Übung 4.1

a) Wir verwenden folgende Energie und folgenden Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \text{Energie:} \quad E &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2 + mgz \\ \text{Drehimpuls:} \quad J &= mr(r\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta} = mz^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Außerdem drücken wir die Geschwindigkeit in zylindrischen Polarkoordinaten aus.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{z}\mathbf{e}_z = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z \\ |\mathbf{v}(t)|^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

Die Energie mit der das Teilchen startet beträgt $\frac{1}{2}mv^2 + mga$. Der Energieerhaltungssatz führt zu

$$\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2 + mgz = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}mv^2 + mga$$

Das Teilchen bewegt sich auf dem Kegelmantel, somit gilt $\dot{z} = \dot{r}$ und wir erhalten

$$\dot{z}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + gz = \frac{1}{2}v^2 + ga\,. \tag{1}$$

Der Drehimpuls mit dem das Teilchen startet beträgt mav. Die Drehimpulserhaltung führt zu

$$mr^2\dot{\theta} = mav \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{av}{r^2}\,.$$

Nun kombinieren wir dieses Ergebnis mit der Gleichung (1) und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}r^2(\frac{av}{r^2})^2 + gz &= \frac{1}{2}v^2 + ga \\ \Rightarrow \quad \dot{z}^2 + \frac{a^2v^2}{2z^2} + gz &= \frac{1}{2}v^2 + ga\,.\end{aligned}$$

b) Da die Höhe eine rein reelle Größe ist, muss gelten

$$\dot{z}^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2v^2}{2z^2} + gz < \frac{1}{2}v^2 + ga\,.$$

Diese Gleichung ist genau dann gelöst, wenn die z in dem Intervall $[z_{\text{min}}, z_{\text{max}}]$ befindet. Die Intervallgrenzen z_{min} und z_{max} sind die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^2v^2}{2z^2} + gz &= \frac{1}{2}v^2 + ga \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}a^2v^2 + gz^3 &= \left(\frac{1}{2}v^2 + ga\right)z^2 \\ \Rightarrow \quad gz^2(z-a) &= \frac{1}{2}v^2(z^2 - a^2) = \frac{1}{2}v^2(z+a)(z-a)\end{aligned}$$

So ergibt sich als Lösung, entweder $z = a$ oder

$$\begin{aligned}gz^2 &= \frac{1}{2}v^2(z+a) \\ \Rightarrow \quad z_{\text{max/min}} &= \frac{1}{4}\frac{v^2}{g} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4}v^4 + 2v^2ag}}{2g}\end{aligned}$$

Das Teilchen bleibt zwischen diesen beiden Höhen.

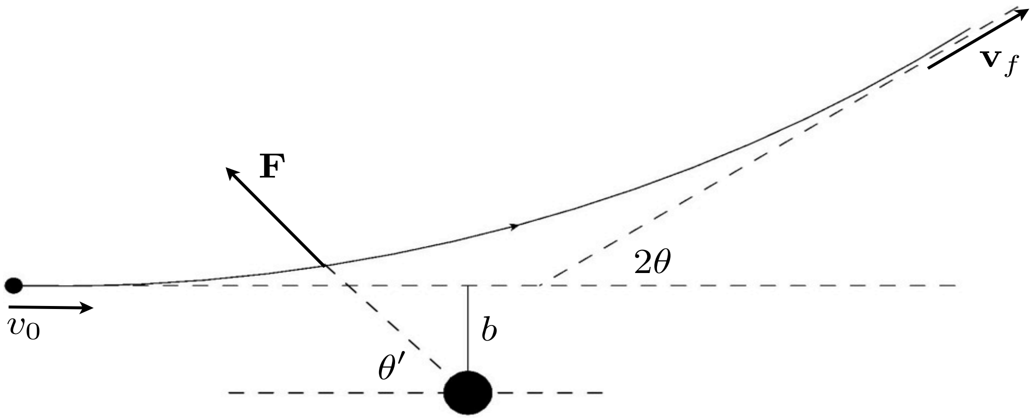
Übung 4.2: Streuung in einer zentralen Kraft

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich aus der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit v_0 auf ein festes Objekt im Ursprung zu. Durch dieses Objekt wirkt auf das Teilchen eine Kraft $\mathbf{F} = k/r^2\mathbf{e_r}$. Wenn das Teilchen durch die Kraft $\mathbf{F}$ nicht beeinflusst werden würde, würde es das Objekt im Ursprung mit einem Abstand b passieren.

a) Wie große ist der geringste Abstand zum Kraftzentrum den das Teilchen auf seiner Flugbahn erreicht?

b) Welche Winkelablenkung Θ tritt auf?

Lösung von Übung 4.2



a)

Anfangsenergie: $\frac{1}{2}mv_0^2$ Energie bei geringstem Abstand zum Zentrum $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \frac{k}{R}$

Wir bezeichnen den geringsten Abstand zum Zentrum den das Teilchen auf seiner Flugbahn erreicht mit R. Wenn das Teilchen diesen Abstand einnimmt gilt $\dot{r} = 0 \Rightarrow |\mathbf{v}| = R\dot{\theta}$. Aus der Drehimpulserhaltung und dem Anfangsdrehimpuls erhalten wir

$$J = mv_0 b = m|\mathbf{v}|R \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = \frac{v_0 b}{R}\,.$$

Nutzen wir nun auch noch die Energieerhaltung so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{k}{R} + \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 b^2}{R^2} \\
\Rightarrow \quad 0 &= R^2 - \frac{2kR}{mv_0^2} - b^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad R &= \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}\,.
\end{aligned}$$

b) Wir definieren in weiser Voraussicht $\Theta = 2\theta$ und $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$, wobei $\mathbf{v}_i$ die Anfangs- und $\mathbf{v}_f$ die Endgeschwindigkeit ist. Die durch das Objekt im Zentrum hervorgerufene Impulsänderung beträgt

$$m\Delta\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}dt\,.$$

Es herrscht Energieerhaltung und somit gilt $|\mathbf{v}_f| = |\mathbf{v}_i| = v_0$. Unter Nutzung dieser Identität können wir die Gleichung

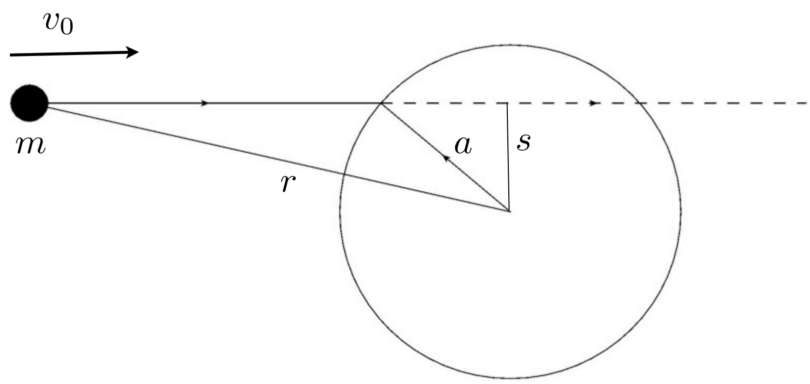
$$\begin{aligned}
m\mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{v} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}dt \\
\Rightarrow \quad m(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_i - v_0^2) &= -\int_{-\infty}^{\infty} F\cos\theta' v_0 dt \\
\Rightarrow \quad m(v_0^2\cos 2\theta - v_0^2) &= -\int_{-\infty}^{\infty} F\cos\theta' v_0 dt \\
\Rightarrow \quad mv_0(\cos 2\theta - 1) &= -\int_{0}^{\pi-2\theta} F\cos\theta' \frac{dt}{d\theta'} d\theta'
\end{aligned}$$

ableiten. Die vom Zentrum ausgeübte Kraft beträgt $F = \frac{k}{r^2}$ und für den Drehimpuls gilt $J = mr^2\dot{\theta}'$. Setzen wir diese beiden Größen ein, so ergibt sich das Ergebnis

$$\begin{aligned}
mv_0(\cos 2\theta - 1) &= -\int_0^{\pi-2\theta} \frac{k}{r^2}\frac{\cos\theta'}{\dot{\theta}'}d\theta' \\
\Rightarrow \quad mv_0(\cos 2\theta - 1) &= -\int_0^{\pi-2\theta} \frac{mk}{J}\cos\theta' d\theta' \\
\Rightarrow \quad mv_0(\cos 2\theta - 1) &= -\frac{mk}{J}\sin(\pi - 2\theta) \\
\Rightarrow \quad -\frac{Jv_0}{k}(\cos 2\theta - 1) &= \sin 2\theta \\
\Rightarrow \quad -\frac{Jv_0}{k}(-2\sin^2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\Rightarrow \quad \cot\theta &= \frac{Jv_0}{k} = \frac{mv_0^2 b}{k}\,.
\end{aligned}$$

Übung 4.3: Streuung an der Kugeloberfläche

Man betrachte ein abstoßendes Kraftfeld $\mathbf{F} = \left(\frac{mv_1^2}{2}\right)\delta(r-a)\mathbf{e_r}$, wobei a ein fester Radius ist und v_1 als konstant angenommen wird. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0 auf das Kraftfeld zu. Wenn es nicht abgelenkt werden würde, würde es die Mitte des Kraftfeldes im Abstand s passieren.



a) Berechnen Sie die potentielle Energie des Teilchens.
b) Zeigen Sie, dass das Teilchen die Kugeloberfläche nicht durchdringt wenn $v_0 < v_1$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall das Teilchen nach dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) von der Kugeloberfläche abprallt.
c) Skizzieren Sie den Weg des Teilchens für $v_0 > v_1$ und $s = \frac{a}{2}$.

Lösung von Übung 4.3

a) Zunächst berechnen wir das Potenzial

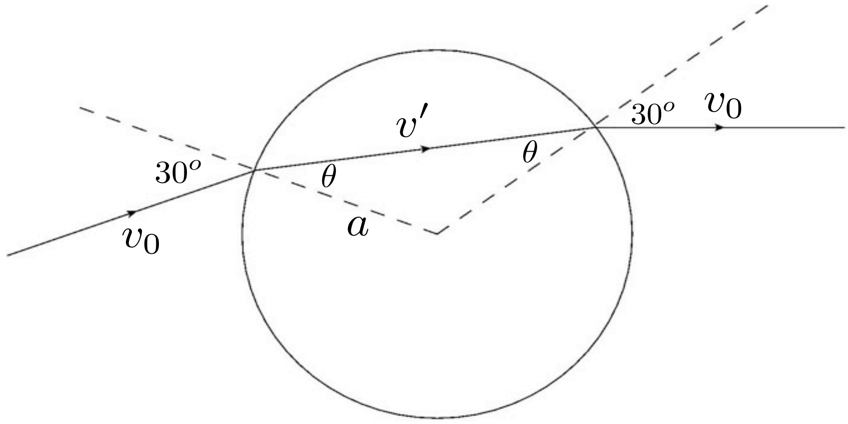
$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= -\int_{-\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' = \frac{1}{2}mv_1^2\int_r^{\infty}\delta(r'-a)dr' \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 & \text{wenn } r < a \\ 0 & \text{wenn } r > a \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

b) Nun verwenden wir die Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2\,, \tag{2}$$

wobei v' die Geschwindigkeit des Teilchens im inneren der Kugel $r \leq a$ bezeichnet. Damit das Teilchen überhaupt in die Kugel eindringen kann, muss v' real sein, also muss die Bedingung $v_0 > v_1$ erfüllt sein. Das Reflexionsgesetz Einfallswinkel = Ausfallswinkel ist eine Folge der Symmetrie des Potentials.

c) Für $v_0 > v_1$ und $s = \frac{a}{2}$, wird das Teilchen mit einem Winkel von $\theta_0 = \arcsin(\frac{a/2}{a}) = 30^o$ auf die Kugel treffen und in diese eindringen.



Der Impuls bleibt an der Stelle $r = a$ in der Richtung tangential zur Kugel erhalten. Zusammen mit (2) führt das zu

$$\begin{aligned} v_0 \sin 30^o &= v' \sin\theta \\ \Rightarrow \quad \theta &= \arcsin\left(\frac{v_0}{2\sqrt{v_0^2 - v_1^2}}\right) \end{aligned}$$

Da $V(\mathbf{r})$ innerhalb der Kugel konstant ist, bewegt sich das Teilchen auf einer geraden Linie, bis es wieder die Kugelhülle berührt. Der Winkel θ_1, unter dem das Teilchen die Kugel verlässt, ergibt sich auf die gleiche Weise wie der Eintrittswinkel (siehe Skizze).

Übung 4.4: Instabil Umlaufbahnen

Ein Teilchen der Masse 1 wird einer Zentralkraft $\mathbf{F} = -\frac{c}{r^n}\mathbf{e_r}$ ausgesetzt (c und n sind konstant).

a) Zeigen Sie, dass

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{c}{r^n}$$

gilt. Die Größe $h = r^2\dot{\theta}$ ist dabei konstant.

b) Zeigen Sie, dass eine Bewegung auf dem Kreis mit dem Radius $r = a$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \Omega$ ($\Omega^2 = \frac{c}{a^{n+1}}$) möglich ist.

c) Zeigen Sie, dass diese Kreisbewegung instabil ist sobald $n > 3$ gilt.

Lösung von Übung 4.4

a) Aus dem zweiten Newton'schen Axiom ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{c}{r^n}\mathbf{e}_r \\
\Rightarrow \quad (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z &= -\frac{c}{r^n}\mathbf{e}_r \\
\Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{c} r^2\dot{\theta} = h = \text{const} \\ \ddot{z} = 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{c}{r^n} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die erste und die dritte Gleichungen, so erhalten wir

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{c}{r^n}\,. \tag{3}$$

b) Damit die Bewegung auf einem Kreis stattfindet, muss gelten $\dot{r} = \ddot{r} = \dot{z} = \ddot{z} = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich Gleichung (3) zu

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{r^3} &= \frac{c}{r^n} \\
\Rightarrow \quad h^2 &= cr^{3-n}\,.
\end{aligned}$$

Mit $r = a$ und den Definition von h und Ω erhalten wir

$$\begin{aligned}
a^4\dot{\theta}^2 &= ca^{3-n} \\
\Omega^2 &= \frac{c}{a^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Somit sind alle Gleichungen die aus den zweiten Newton'schem Axiom hervorgegangen sind gelöst und der Bewegung auf einem Kreis steht nicht entgegen.

c) Um die Stabilität zu untersuchen, betrachten wir die kleine Änderungen

$$r = a + \epsilon(t) \quad \text{wo} \quad \epsilon(t) << a \tag{4}$$

des Radius. Setzen wir nun Gleichung (4) in Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\ddot{\epsilon} = \frac{h^2}{(a+\epsilon)^3} - \frac{c}{(a+\epsilon)^n}\,.$$

Da $\epsilon(t)$ sehr klein ist, können wir diese Gleichung in linearer Ordnung entwickeln und erhalten

$$\ddot{\epsilon} = -\frac{3h^2}{a^4}\epsilon + \frac{cn}{a^{n+1}}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.$$

Wir ignorieren $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ und nehmen an, dass die Fluktuation von r zunächst Null ist. Dadurch bleibt der Drehimpuls h^2 =konstant= ca^{3-n} unverändert.

$$\begin{aligned}
\ddot{\epsilon} &= -3ca^{-(n+1)}\epsilon + cna^{-(n+1)}\epsilon \\
\ddot{\epsilon} &= (n-3)\frac{c}{a^{n+1}}\epsilon
\end{aligned}$$

Für $n > 3$ ist $(n-3)\frac{c}{a^{n+1}}$ positiv. In diesem Fall vergrößert sich eine geringe Schwankung der Umlaufbahn mit der Zeit. Die Umlaufbahn ist dann also instabil.