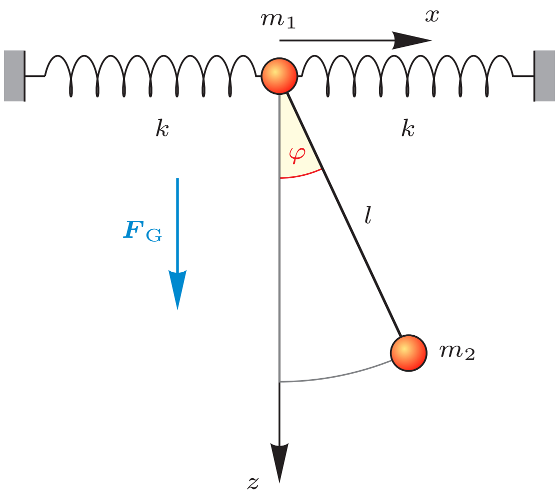
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

10. Lagrange-Formalismus

Übung 10.1: Pendel an Federn

Eine Punktmasse m_1 ist wie in die Abbildung durch zwei Federn an zwei Wänden befestigt. Die Ruhelänge der Federn entspricht gerade dem Fall, dass m_1 sich in der Mitte zwischen den Wänden befindet. Beide Federn haben die gleiche Federkonstante k, d. h. die Rückstellkraft ist dem Betrage nach $|F| = k|x|$. Die Punktmasse m_1 darf sich nur waagerecht (entlang der x-Achse) bewegen. Es ist eine weitere Punktmasse m_2 mit einem masselosen Stab der Länge l an m_1 befestigt. Die zweite Punktmasse kann in der $x - z$-Ebene unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft $\mathbf{F}_G = -m_2 g \hat{\mathbf{e}}_z$ schwingen. Der Auslenkungswinkel des Pendels ist φ.



Die Massen m_1 und m_2 sind durch einen Stab der Länge l verbunden. Während m_1 über zwei Federn mit Federkostanten k an den Wänden befestigt ist, kann m_2 an m_1 unter dem Einfluss der Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$ schwingen.

a) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

c) Nehmen Sie nun an, dass der Auslenkungswinkel φ klein ist. Zeigen Sie, dass sich beide Bewegungsgleichungen jeweils in der Form

$$a\ddot{q} + bq = f(q', \dot{q}', \ddot{q}')$$

schreiben lassen. Hier sind a und b konstante Koeffizienten, q ist die eine und q' die andere verallgemeinerte Koordinate. Beide Bewegungsgleichungen beschreiben eine getriebene Schwingung.

Übung 10.2: Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten aus dem Lagrange-Formalismus

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse in Kugelkoordinaten auf. Nutzen Sie dazu den Lagrange-Formalismus. Das Potenzial soll dabei eine allgemeine Funktion $V(r, \theta, \phi)$ sein.

b) Eine Punktmasse bewege sich in einem radialsymmetrischen Potenzial $V(r)$. Allerdings ist ihre Bewegung durch eine Zwangsbedingung nur auf einer Kegeloberfläche mit Öffnungswinkel $\theta = \theta_0$ möglich. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem auf. Zeigen Sie, dass die Radialgleichung in der Form

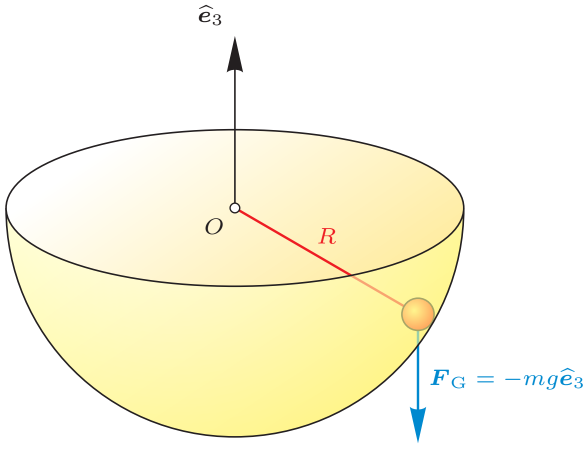
$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r}$$

geschrieben werden kann. Wie lautet das effektive Potenzial V_{eff}?

c) Überlegen Sie sich den Fall,dass die Zwangsbedingung nicht zu einer Bewegung auf einem Kegel führt, sondern zu einer Bewegung auf einer Ebene mit $\phi = \phi_0$. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie für die kräftefreie Bewegung in der Form $r(\theta)$. Welche Gestalt hat die resultierende Bahnkurve? (Diese letzte Frage lässt sich auch direkt durch Nachdenken beantworten.)

Übung 10.3: Pendel mit variabler Fadenlänge

Stellen Sie sich zunächst eine sphärisches Pendel vor (diese Art von Pendel wird im Skript http://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/sose_13/T1/mechanikskript.pdf ausführlich vorgestellt.



Das sphärische Pendel kann man sich als eine Punktmasse vorstellen, die zu einem Aufhängepunkt (Ursprung O) den konstanten Abstand R besitzt. Das Pendel kann unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen.

Nun sei die Fadenlänge nicht mehr konstant (wie in der Abbildung dargestellt), sondern sie ist durch die Funktion $R = R(t)$ vorgegeben und somit zeitabhängig.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion in Kugelkoordinaten. Nutzen Sie dazu die Ergebnisse aus der vorangegangenen Aufgabe.

Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. Was ist beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen zu beachten (denken Sie dabei an die Anzahl der Freiheitsgrade)?