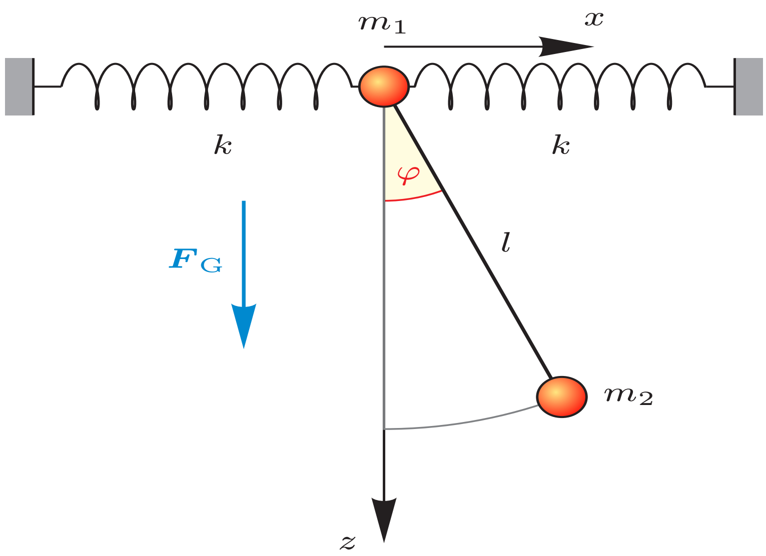
Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst | Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 | James.Gray@physik.uni-muenchen.de

3. Erhaltungsgrößen und die Newton'schen Axiome

Übung 3.1: Perlen gleiten auf einem Ring

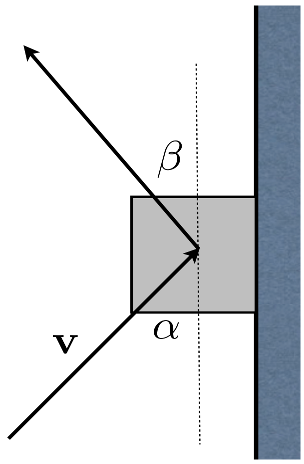
Zwei Perlen gleiten ohne Reibung auf einem ebenen Ring mit dem Radius R. Die schwerere von beiden (Masse $3m$) ist mit einer Feder (Federkonstante K) verbunden. Im ungedehnten Zustand schrumpft die Feder auf einen Punkt zusammen. Das feste Ende der Feder ist an einem Punkt mit dem horizontalen Abstand $2R$ vom Zentrum des Kreises angebracht. Die leichtere Perle (Masse m) ist zunächst am Boden des Rings in Ruhe. Die schwerere Perle wird an der Oberseite des Rings freigegeben, kollidiert dann mit der leichteren und klebt an dieser.

a) Bestimmen Sie den Wert von m, bei dem beide Perlen (Masse zusammen $4m$) gerade den Punkt A auf dem Ringe erreichen, diesen aber nicht überschreiten. Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von den Konstanten K, R und der Erdbeschleunigung g an. Ist es unabhängig von einer dieser Größen unabhängig?



Übung 3.2: Reflexion eines Würfel

Ein elastischer Würfel kann sich auf einem Luftkissentisch ohne Reibung bewegen. Der Würfel wird nun so bewegt, dass zwei seiner sechs Seitenflächen parallel zur Umrandung des Luftkissentisches sind. Der Reibungskoeffizient zwischen Würfel und Umrandung beträgt μ. Der Schwerpunkt des Würfels bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ unter dem Winkel α auf die Umrandung zu. Berechnen Sie den Winkel β unter dem sich der Würfel nach der Reflexion wieder von der Umrandung entfernt.



(Hinweis: Die Reibung mit der Umrandung führt zu einer Kraft $\mu F_\perp(t)$ auf den Würfel. Diese Kraft wirkt der Bewegung entlang der Umrandung entgegen. Die Größe $F_\perp(t)$ bezeichnet dabei die Kraft, die der Würfel auf die Wand ausübt.)

Übung 3.3: Satz von Stokes

Wir betrachten das Kraftfeld

$$\mathbf{F} = 2x\mathbf{e}_x - (xy - 3z)\mathbf{e}_y + (4yz - x)\mathbf{e}_z \ .$$

Die Vektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ sind Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen x, y und z.

Zeigen Sie, dass

$$\int\int_C (\nabla \times \mathbf{F}).d\mathbf{A} = 0$$

gilt. Dabei bezeichnet C die Oberfläche der Halbkugel über der xy-Ebene.

a) Werten Sie das Integral direkt aus.

b) Verwenden Sie den Satz von Stokes.

c) Handel es sich bei $\mathbf{F}$ um eine konservative Kraft?

Übung 3.4: Polarkoordinaten und die Newton'schen Axiome

Ein Teilchen bewegt sich unter der Schwerkraft auf der Innnenseite eines Kegelmantels $r = z$. Die Koordinaten r, θ und z sind zylindrische Polarkoordinaten. Die z-Achse zeigt senkrecht nach oben. Das Teilchen startet auf der Höhe $z = a$. Die θ-Komponente seiner Anfangsgeschwindigkeit beträgt $(ga)^{1/2}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$2\ddot{z} - \frac{ga^3}{z^3} + g = 0$$

gilt.

b) Nun sei $z = a + \epsilon(t)$, wobei $\epsilon(t) << a$ ist. Zeigen Sie, dass man diese Gleichung durch

$$\ddot{\epsilon} + \frac{3g}{2a}\epsilon = 0 \quad .$$

nähern kann. Beschreiben Sie die so entstehende Bewegung.